Análisis descriptivo de las tareas que proponen profesores de matemática para propiciar el uso del número real en el aula

Caraballo Lucía[1,2], Emmanuele Daniela[1,3]

[1] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario.
[2] luciacaraballo89@gmail.com, [3]emmanueledaniela@gmail.com

Resumen
Esta investigación tiene como objetivo describir las tareas que proponen profesores de matemática en sus clases para propiciar el uso del número real, bajo el marco teórico de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME). Para ello, se ha planteado una metodología cualitativa, descriptiva y transversal, un estudio de caso intrínseco compuesto por tres docentes con título de Profesor/a en Matemática (o equivalente), en ejercicio profesional, que trabajan enseñando números reales en alguna escuela secundaria del departamento Rosario, Santa Fe, Argentina. Se ha realizado un análisis del material de estudio que utilizan las docentes para desarrollar sus clases. Entre los resultados se advierte el predominio de tareas cuya función es la de operar con números reales, y la ausencia de tareas que propicien la construcción de la recta numérica y la completitud del campo numérico. Tampoco se presentan tareas que estudien la convergencia de sucesiones de números racionales cuyo límite es un número irracional (como, por ejemplo, el número π o $\sqrt{2}$), aunque sea de forma intuitiva. Se concluye que las tareas descriptas propician el aspecto aritmético del número real y que soslaya el estudio de otras características, no ofreciendo demasiadas oportunidades para la construcción de este concepto.

Palabras clave: usos del número real; funcionamiento y forma de una tarea; teoría socioepistemológica; educación secundaria.

Planteamiento del problema

Al observar libros de texto de educación secundaria (Abálsamo et al., 2013; Jaller A. & Pérez, 2017; Chorny et al., 2015) se puede advertir que, en su mayoría, la presentación de los números reales viene dada como una forma de llamar conjuntamente a los números racionales y a los números irracionales. Algunas propuestas utilizan la notación de conjuntos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ e incluso presentan un diagrama de Venn para representar esta definición y las relaciones existentes entre otros conjuntos numéricos ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$). Esta presentación es propia de la enseñanza tradicional de la matemática, que parece haberse instalado desde la época denominada reforma de la Matemática Moderna (década del 60), e implica una presentación formalizada y descontextualizada, no siendo una verdadera construcción significativa del concepto. ¿Cuál es la necesidad de construir el conjunto de los números reales? Esta presentación, ¿deja entrever cuál es la diferencia entre un número real y un número racional? ¿Se trata de un concepto nuevo o es solo una manera de llamar conjuntamente a los números racionales e irracionales? Reconociendo a los libros de texto como un elemento de referencia importante para el profesor de escuela secundaria, que en numerosos casos utiliza en su práctica, y a pesar de todas las críticas y los fracasos encontrados en la reforma de la Matemática Moderna (Kline, 1976), podría sospecharse que no se ha logrado plantear una enseñanza diferente más cercana a las corrientes didácticas actuales.

Esta investigación es parte de una tesis de Maestría en Didáctica de las Ciencias, cuyo objetivo general es describir las concepciones que poseen los profesores de matemática sobre los números reales. Se pretende indagar cómo enseñan el número real en la escuela secundaria considerando la gran capacidad que tienen de poder transformar su práctica en forma directa. Interesa la enseñanza de un saber puesto en uso, que surge en un cierto contexto y es apropiado por parte de quien lo aprende, dado que se lo construye desde la mirada de quien lo inventa y de quien lo usa. Serán aquellas tareas que proponga el profesor a sus alumnos en el aula las que dejarán en evidencia si se presentan o no oportunidades para propiciar el uso del número real, entreviendo cómo el sujeto actúa sobre este conocimiento e identifica a qué propósitos sirve y el rol que ocupa en esa situación específica. Por tal razón, se plantea el objetivo de identificar y describir las tareas que proponen los profesores de matemática, para propiciar el uso del número real en el aula.

Marco conceptual

Se elige la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) como marco teórico, dado que es una teoría que se caracteriza principalmente por estudiar la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional (Cantoral, Reyes Gasperini & Montiel, 2014). Es posible advertir que desde esta teoría se pone en jaque la epistemología estructuralista de la matemática, propia de la reforma de la Matemática Moderna, que atraviesa la enseñanza del número real en la actualidad. En la TSME se reconoce el paso del conocimiento al saber a través de su uso, puesto que interesa estudiar la vida de los objetos matemáticos en el seno de la vida social. De esta manera, el significado dejará de ser visto como un atributo del objeto y pasará a considerarse como un derivado de su valor de uso (Cantoral, Montiel, & Reyes Gasperini, 2015). Por lo tanto, conocer cómo el sujeto actúa sobre un conocimiento e identifica a qué propósitos sirve y el rol que ocupa en una situación específica dotará de significación relativa, situada y contextualizada a los objetos formales (en este caso, el número real).

Las situaciones que plantee el docente para propiciar el uso del número real en el aula, estarán manifestadas por un patrón de tareas que componen esa situación. Para reconocer y describir esas tareas, se considera lo planteado por Cordero & Flores (2007), quienes formulan una epistemología del uso de las gráficas. Los autores analizan libros de texto de nivel básico (primaria y secundaria) para identificar el uso que se les da a las gráficas con respecto a su función y su forma, definiendo estos aspectos:

> El ‘uso’ es la función orgánica de la situación que se manifiesta por las ‘tareas’ que componen la situación, y la forma del “uso” serán la clase de esas ‘tareas’. Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancia de dominios. Cuando la alternancia de tareas sucede se genera una nueva función orgánica que debatirá con las formas de los usos. (Cordero & Flores, 2007, p. 13)

Las tareas se caracterizan entonces a partir de su función y su forma en una situación específica en donde se ponga en uso el conocimiento. En esta investigación se entiende por función de la tarea a aquellos propósitos según los cuales el conocimiento se manifiesta y por forma a los requerimientos del quehacer matemático para llevar adelante la tarea. Luego, se podrá identificar la función y la forma de las tareas que se propongan en una clase de número real.

Marco metodológico

Para esta investigación se ha planteado una metodología cualitativa, descriptiva y transversal. El diseño es un estudio de caso intrínseco dado que interesa investigar la enseñanza del número real en la escuela secundaria por parte de profesores de Matemática en toda su particularidad y su carácter ordinario. Para llevarlo a cabo se han seleccionado tres docentes con título de Profesor/a en Matemática (o equivalente), en ejercicio profesional, que trabajan enseñando números reales en alguna escuela secundaria del departamento Rosario, Santa Fe, Argentina. Las profesoras (A, B y C) han sido escogidas teniendo en cuenta su formación y su trayectoria profesional de manera tal que contemple variedad, ya que se consideran características influyentes en la enseñanza. La docente A es egresada en un profesorado terciario, a diferencia de las docentes B y C que son egresadas de un profesorado universitario. Todas las docentes ejercen la docencia en escuelas secundarias del dpto. Rosario. Las docentes B y C, a diferencia de la docente A, enseñan también en el nivel universitario. La docente C, a diferencia de las docentes A y B, realiza además investigación en el ámbito universitario.

Se ha realizado un análisis del material didáctico utilizado para el desarrollo de la unidad Números Reales, complementando con la observación no participante de las clases correspondientes a este contenido. En este caso, se trata de fotocopias de libros utilizadas, apuntes realizados por las docentes (o por el grupo de docentes que componen el dpto. de Matemática de la escuela) o cualquier actividad dada para la ejecución de tareas dentro de las clases de Número Real dictadas por las docentes.

Se han agrupado las tareas que corresponden a una función y forma particular. Con el objetivo de reconocer si hay supremacía sobre un tipo de tarea específico, se ha contabilizado la cantidad de tareas propuestas por cada docente y de cada grupo, a lo largo de toda la unidad. Para cada patrón de tareas encontradas, se realiza una descripción de una tarea representante de su grupo, con el fin de esclarecer la función y la forma a la que responde. De esta manera se pretende identificar los diferentes tipos de tareas que se proponen en torno al concepto de número real y si propician su construcción y su uso en los estudiantes.

Resultados

Aunque los contenidos desarrollados por cada docente en la unidad denominada Números Reales son muy distintos, se ha podido identificar que la mayoría de las tareas tienen como función operar con números (ya sean fraccionarios, decimales o radicales), siendo la forma de estas tareas seguir una serie de propiedades (o axiomas) que norman la operatoria (Tabla 1). Estas propiedades son presentadas en las clases de antemano sin demostración, ni discusión acerca de su validez. Además, las operaciones no vuelven a definirse para los números reales y pareciera que siguen rigiendo las mismas reglas que son válidas para los números racionales (aunque nunca se hace explícito). Las tareas corresponden a la matemática pura, en su mayoría el cálculo que debe realizarse se proporciona explícitamente y, en menor proporción, debe formularse a partir de problemas de un contexto geométrico (por ejemplo, al calcular la medida de un lado de un triángulo rectángulo conociendo la medida de sus otros dos lados) o de un contexto físico/químico (por ejemplo, en notación científica, para calcular la cantidad de glóbulos rojos en sangre de una persona). En todos ellos, los datos necesarios vienen proporcionados en el enunciado y solo debe identificarse la operación que se debe realizar a partir de su interpretación.

Tabla 1. Tareas cuya función es la operatoria con elementos del cuerpo de los números reales

Descripción de las tareas	# de tareas
Docente A: se solicita al alumno extraer factores de un radical, operar con radicales, racionalizar denominadores, resolver ecuaciones con y sin módulo, calcular el módulo de un número real.	25
Docente B: se solicita resolver operaciones combinadas con números racionales, obtener la representación decimal de una fracción para luego clasificarla, obtener la representación como fracción de un número decimal periódico, resolver ecuaciones lineales con una incógnita que involucran números racionales, expresar y operar con números en notación científica, resolver operaciones entre números racionales e irracionales.	27

Docente C: se solicita resolver operaciones con números racionales, resolver operaciones combinadas con radicales (a partir su representación con exponente fraccionario), expresar un número en notación científica cuando aparece desarrollado (y viceversa), operar con números expresados en notación científica, aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de un lado de un triángulo rectángulo o para decidir si un triángulo es rectángulo a partir de la medida de sus lados, redondear o truncar números racionales o irracionales a partir de su representación decimal.	35

Solo las docentes A y B proponen en sus clases tareas cuya función es la comparación entre números (relación de orden del cuerpo de los números reales) y su función es la comparación de elementos, aplicando propiedades relativas a inecuaciones (Tabla 2).

Tabla 2. Tareas cuya función es la comparación entre elementos del cuerpo de los números reales (relación de orden)

Descripción de las tareas	**# de tareas**
Docente A: se solicita a los alumnos resolver inecuaciones con o sin módulo.	7
Docente B: se solicita plantear una inecuación que exprese una afirmación dada en forma coloquial, resolver inecuaciones, identificar si un número real pertenece o no a un intervalo.	5

Las docentes A y B también plantean, aunque en menor medida, tareas referidas a la representación de puntos sobre la recta numérica. En el caso de la docente A, se solicita al alumno expresar una ecuación o inecuación cuya solución represente un conjunto dado de puntos de una recta. Las dos actividades que propone tienen como función la representación algebraica de un conjunto de puntos de la recta numérica y su forma es la búsqueda de esa representación algebraica (ecuación o inecuación) que represente el conjunto de puntos dado. La docente B solicita al alumno, en una única tarea, la representación de intervalos dados en la recta real (función), identificando los puntos de la recta que cumplen con la inecuación dada para luego marcarlos (forma).

La docente B es la única que plantea una actividad cuyo objetivo es observar a qué número entero es igual un número decimal periódico puro con período 9. Al trabajar este ejercicio la docente menciona en una clase el acercamiento que existe entre 0,999 ... y 1, hasta el punto de ser iguales. Si bien la aclaración es sutil y no se ahonda en la convergencia de la sucesión que se obtiene de agregar sucesivamente nueves al decimal 0,9, se identifica como función de esta tarea el análisis de la convergencia de una sucesión, siendo su forma analizar a qué número converge la sucesión obtenida al agregar infinitamente nueves a una expresión decimal hasta convertirla en periódica con período 9.

Análisis de los resultados

Puede decirse que el aspecto aritmético y algorítmico del número real es lo que predomina en las tareas propuestas por las tres docentes. La mayor preocupación de la docente A aparenta ser el trabajo con radicales, al operar con este tipo de números irracionales (los que son de la forma raíz enésima de un racional). La docente B prioriza la aplicación de propiedades de la radicación, sobre todo para extraer factores fuera del radical. La docente C, en cambio, hace hincapié en la aproximación de números irracionales diferenciándola de la forma exacta. Se podría decir que se da preferencia a lo algorítmico por sobre lo conceptual, pareciera que lo que importa es operar con los números reales aunque no se sepa del todo de qué tipo de entes matemáticos se trata.

En ningún caso, las actividades propuestas mencionan la completitud de la recta. Las únicas que trabajan la representación de números reales en la recta numérica son las docentes A y B, aunque solo como sostén para identificar el intervalo que representa la solución de una inecuación. No se encuentran oportunidades para la discusión acerca de qué números reales se pueden representar en la recta de forma exacta, cuáles son posibles de localizar, ni por qué se pide a la recta que contenga a todos los números reales. No se explora en profundidad una de las propiedades más complejas del conjunto de los números reales como lo es su completitud. Solo la docente B propone sutilmente en sus tareas el trabajar con el número real como límite de una sucesión. Sin embargo, el análisis se queda corto y no se retoma la discusión para otro tipo de números (por ejemplo, irracionales y su expresión decimal infinita). El uso de la calculadora para el cálculo de las primeras cifras decimales de, por ejemplo, $\sqrt{2}$ oculta la forma de obtener números decimales exactos que elevados al cuadrado den resultados cada vez más cercanos al número 2. No se construye la aproximación decimal cada vez más cercana al número π, al número e o al número $\sqrt{2}$; a pesar de ser presentados por las docentes como primeros ejemplos de número irracional.

Conclusiones

En las tres docentes se ha identificado una mayor cantidad de tareas cuya función es la de operar con elementos del conjunto de los números reales, aplicando propiedades dadas de antemano. En general, sus principales objetivos son resolver cálculos y realizar el pasaje de un tipo de representación a otro. No se presentan tareas que propicien la medición, la construcción o la comparación de segmentos, ni que trabaje la continuidad de la recta o la completitud del campo numérico. Tampoco la convergencia de sucesiones de números racionales cuyo límite es un número irracional, aunque sea de forma intuitiva. Podría decirse que prima el aspecto aritmético del número por sobre el geométrico o el analítico; que las tareas descriptas propician la operatoria del número y que soslaya el estudio de otras características (como la de ser un campo completo), que sigue reglas estáticas, algorítmicas y memorísticas, y que no ofrecen demasiadas oportunidades para la construcción del concepto de número real, reconociendo a las prácticas sociales como generadoras del conocimiento.

Referencias bibliográficas

Abálsamo, R., Berio, A., Kotowski, C., Liberto, L., Mastucci, S., & Quirós, N. (2013). *Matemática 3, fotoactivados*. Puerto de Palos.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático en los libros de texto desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 9–28.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91–116.

Chorny, F., Salpeter, C., & Casares, O. (2015). *Matemática 4 ES Huellas*. Estrada.

Cordero, F., & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Relime*, *10*(1), 7–38.

Jaller A., & Pérez, M. (2017). *Entre números III*. Santillana.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*.